

Chapter 2 Polynomials (बहुपद)

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1.

निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल : (i) $4x^2 - 3x + 7$ में केवल एक चर x है। इसमें x की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ एक चर में बहुपद है।

● (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ में केवल एक चर y है। इसमें y की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $y^2 + \sqrt{2}$ एक चर में बहुपद है।

● (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ के पद $3\sqrt{t}$ में t की घात $\frac{1}{2}$ है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ बहुपद नहीं है।

● (iv) $y + \frac{2}{y}$ के पद $\frac{2}{y}$ में y की घात -1 है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $y + \frac{2}{y}$ बहुपद नहीं है।

● (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$ में तीन चर x, y और t हैं तथा इनकी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

अतः यह बहुपद है परन्तु एक चर में नहीं है।

(i) $4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल : (i) $4x^2 - 3x + 7$ में केवल एक चर x है। इसमें x की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ एक चर में बहुपद है।

● (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ में केवल एक चर y है। इसमें y की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $y^2 + \sqrt{2}$ एक चर में बहुपद है।

● (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ के पद $3\sqrt{t}$ में t की घात $\frac{1}{2}$ है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ बहुपद नहीं है।

● (iv) $y + \frac{2}{y}$ के पद $\frac{2}{y}$ में y की घात -1 है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $y + \frac{2}{y}$ बहुपद नहीं है।

● (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$ में तीन चर x, y और t हैं तथा इनकी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

अतः यह बहुपद है परन्तु एक चर में नहीं है।

प्रश्न 2.

निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए :

(i) $2 + x^2 + x$

(ii) $2 - x^2 + x^3$

(iii) $\frac{\pi}{2}$

$x^2 + x$

(iv) $\sqrt{2}x - 1$

हल :

(i) $2 + x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = 1

(ii) $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक = -1

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = $\frac{\pi}{2}$

(iv) $\sqrt{2}x - 1$ अर्थात् $0 \cdot x^2 + \sqrt{2}x - 1$ में x^2 का गुणांक = 0

प्रश्न 3.

35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

हल : 35 घात के द्विपद का उदाहरण = $x^{35} + \frac{1}{3}$

100 घात के एकपदी का उदाहरण = $10x^{100}$

हल : 35 घात के द्विपद का उदाहरण = $x^{35} + \frac{1}{3}$

100 घात के एकपदी का उदाहरण = $10x^{100}$

प्रश्न 4.

निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$

(ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$

(iv) 3

हल :

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ में चर x की अधिकतम घात = 3

दिए हुए बहुपद की घात = 3

(ii) $4 - y^2$ में चर y की अधिकतम घात = 2

दिए हुए बहुपद की घात = 2

(iii) $5t - \sqrt{7}$ में चर t की अधिकतम घात = 1

दिए हुए बहुपद की घात = 1

(iv) 3 एक अचर पद है अर्थात् $3 \cdot x^0$

दिए हुए बहुपद की घात = 0

प्रश्न 5.

बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक है, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं :

(i) $x^2 + x$

(ii) $x - x^3$

(iii) $y + y^2 + 4$

(iv) $1 + x$

(v) $3t$

(vi) r^2

(vii) $7x^3$

हल :(i) बहुपद $x^2 + x$ में चर x की अधिकतम घात = 2

यह बहुपद द्विघाती है।

(ii) बहुपद $x - x^3$ में चर x की अधिकतम घात = 3

यह बहुपद त्रिघाती है।

(iii) बहुपद $y + y^2 + 4$ में चर y की अधिकतम घात = 2

यह बहुपद द्विघाती है।

(iv) बहुपद $1 + x$ में चर x की अधिकतम घात 1 है।

यह बहुपद रैखिक है।

(v) बहुपद $3t$ में चर t की अधिकतम घात 1 है।

यह बहुपद रैखिक है।

(vi) बहुपद r^2 में चर r की अधिकतम घात 2 है।

यह बहुपद द्विघाती है।

(vii) बहुपद $7x^3$ में चर x की अधिकतम घात 3 है।

यह बहुपद त्रिघाती है।

प्रटनावली 2.2**प्रश्न 1.**

निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $x = 0$

(ii) $x = -1$

(iii) $x = 2$

हल :माना बहुपद $p(x) = 5 - 4x^2 + 3$ (i) $x = 0$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$$p(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 3$$

(ii) $x = -1$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$$p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 = -5 - 4 + 3 = -6$$

(iii) $x = 2$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$$p(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 16 + 3 = -3$$

प्रश्न 2.

निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0)$, $p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए :

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

हल :

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

$$p(0) = 0^2 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$p(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$p(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$(ii) p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$$

$$p(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = 2$$

$$p(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3 = 2 + 1 + 2 - 1 = 4$$

$$p(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3 = 2 + 2 + 8 - 8 = 4$$

$$(iii) p(x) = x^3$$

$$p(0) = (0)^3 = 0$$

$$p(1) = (1)^3 = 1$$

$$p(2) = (2)^3 = 8$$

$$(iv) p(x) = (x-1)(x+1)$$

$$p(0) = (0-1)(0+1) = (-1)(1) = -1$$

$$p(1) = (1-1)(1+1) = (0)(2) = 0$$

$$p(3) = (2-1)(2+1) = (1)(3) = 3$$

प्रश्न 3.

सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं :

$$(i) p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$$

$$(ii) p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$$

$$(iii) p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$$

$$(iv) p(x) = (x+1)(x-2); x = -1, 2$$

$$(v) p(x) = x^2; x = 0$$

$$(vi) p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$$

$$(vii) p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(viii) p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$$

हल : (i) $p(x) = 3x + 1$

$$\therefore p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}, p(x) \text{ का एक शून्यक है।}$$

● (ii) $p(x) = 5x - \pi$

$$\Rightarrow p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$$

$$\therefore \frac{4}{5}, p(x) \text{ का शून्यक नहीं है।}$$

● (iii) $p(x) = x^2 - 1$

$$\therefore p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1, p(x) \text{ का एक शून्यक है।}$$

और $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$\Rightarrow -1, p(x) \text{ का एक शून्यक है।}$$

$$(i) p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$$

$$(iii) p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$$

$$(v) p(x) = x^2; x = 0$$

$$(vii) p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(ii) p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$$

$$(iv) p(x) = (x+1)(x-2); x = -1, 2$$

$$(vi) p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$$

$$(viii) p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$$

हल : (i) $p(x) = 3x + 1$

$$\therefore p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (ii) $p(x) = 5x - \pi$

$$\Rightarrow p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$$

$\therefore \frac{4}{5}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● (iii) $p(x) = x^2 - 1$

$$\therefore p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow 1, p(x)$ का एक शून्यक है।

और $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow -1, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (iv) $p(x) = (x+1)(x-2)$

$$\therefore p(-1) = (-1+1)(-1-2) = (0)(-3) = 0$$

$\Rightarrow -1, p(x)$ का एक शून्यक है।

और $p(2) = (2+1)(2-2) = 3(0) = 0$

$\Rightarrow 2, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (v) $p(x) = x^2$

$$\therefore p(0) = 0^2 = 0$$

$\Rightarrow 0, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vi) $p(x) = lx + m$

$$\therefore p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$$

$\Rightarrow -\frac{m}{l}, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vii) $p(x) = 3x^2 - 1$

$$\therefore p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}, p(x)$ का एक शून्यक है।

और $p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{4}{3} - 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$

$\therefore \frac{2}{\sqrt{3}}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● (iv) $p(x) = (x+1)(x-2)$
 $\therefore p(-1) = (-1+1)(-1-2) = (0)(-3) = 0$

$\Rightarrow -1, p(x)$ का एक शून्यक है।

और $p(2) = (2+1)(2-2) = 3(0) = 0$

$\Rightarrow 2, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (v) $p(x) = x^2$

$\therefore p(0) = 0^2 = 0$

$\Rightarrow 0, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vi) $p(x) = lx + m$

$\therefore p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$

$\Rightarrow -\frac{m}{l}, p(x)$ का एक शून्यक है।

● (vii) $p(x) = 3x^2 - 1$

$\therefore p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}, p(x)$ का एक शून्यक है।

और $p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{4}{3} - 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$

$\therefore \frac{2}{\sqrt{3}}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● (viii) $p(x) = 2x + 1$

$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

● (viii) $p(x) = 2x + 1$

$\therefore p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

प्रश्न 4.

निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद को शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$

(ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$

(vi) $p(x) = ax; a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d; c \neq 0, c, d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

हल :

(i) बहुपद $p(x) = x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$p(x) = 0$

$\Rightarrow x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x = -5$$

$$p(3) \text{ को शून्यक} = -5$$

(ii) बहुपद $p(x) = x - 5$ को शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = 5$$

(iii) बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = \frac{-5}{2}$$

(iv) बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(5) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = \frac{2}{3}$$

(v) बहुपद $p(x) = 3x$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = 0$$

(vi) बहुपद $p(x) = ax$; $a \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(x) = 0$$

$$\Rightarrow ax = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = 0$$

(vii) बहुपद $p(x) = cx + d$, $c \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$p(x) = 0$$

$$cx + d = 0$$

$$cx = -d$$

$$x = \frac{-d}{c} \text{ (} c \neq 0 \text{)}$$

$$p(x) \text{ का शून्यक} = \frac{-d}{c}$$

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1.

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए :

(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) $x + \pi$

(v) $5 + 2x$

हल :

$$\text{माना } p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

(i) माना $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$p(x)$ को $+1$ से भाग देने पर शेषफल

$$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

● (ii) माना $x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } x - \frac{1}{2} \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{1 + 6 + 12 + 8}{8} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

● (iii) माना $x = 0$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } x \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(0) \\ &= (0)^3 + 3(0)^2 + 3(0) + 1 \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

● (iv) माना $x + \pi = 0 \Rightarrow x = -\pi$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } x + \pi \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(-\pi) \\ &= (-\pi)^3 + 3(-\pi)^2 + 3(-\pi) + 1 \\ &= -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1 \end{aligned}$$

● (v) माना $5 + 2x = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x &= -5 \\ \Rightarrow x &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } 5 + 2x \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p\left(-\frac{5}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{5}{2}\right) + 1 \\ &= -\frac{125}{8} + \frac{75}{4} - \frac{15}{2} + 1 \\ &= \frac{-125 + 150 - 60 + 8}{8} = -\frac{27}{8} \end{aligned}$$

प्रश्न 2.

$x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

माना $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ तथा $x - a = 0$

$p(x)$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल $= (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a = a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$

प्रश्न 3.

जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

हल :

माना $p(x) = 3x + 7x$

यदि $7 + 3x$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(x)$ को $7 + 3x$ से भाग देने पर शेषफल शून्य होना चाहिए।

माना $7 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } 7 + 3x \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\left(-\frac{7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{7}{3}\right) \\ &= -\frac{343}{9} - \frac{49}{3} \\ &= \frac{-343 - 147}{9} = -\frac{490}{9} \neq 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य नहीं है

$\therefore 7 + 3x, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } 7 + 3x \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p\left(-\frac{7}{3}\right) = 3\left(-\frac{7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{7}{3}\right) \\ &= -\frac{343}{9} - \frac{49}{3} \\ &= \frac{-343 - 147}{9} = -\frac{490}{9} \neq 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य नहीं है

$\therefore 7 + 3x, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

प्रश्नावली 2.4

प्रश्न 1.

बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखण्ड $(x + 1)$ है।

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$$(iv) x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

हल : माना $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

● (i) माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-1)$
 $= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

∴ शेषफल शून्य है

∴ $x + 1$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

● (ii) माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

∴ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-1)$
 $= (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

● (iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

∴ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-1)$
 $= (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

● (iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

∴ $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-1)$
 $= (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$
 $= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2} \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x + 1$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

हल : माना $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

● (i) माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$
 $= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

∴ शेषफल शून्य है

∴ $x+1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

● (ii) माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

∴ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$
 $= (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x+1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

● (iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

∴ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$
 $= (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x+1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

● (iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

∴ $p(x)$ को $x+1$ से भाग देने पर शेषफल $= p(-1)$
 $= (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$
 $= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2} \neq 0$

∴ शेषफल शून्य नहीं है।

∴ $x+1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

प्रश्न 2.

गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

$$(iii) p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$$

$$\text{हल : (i) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(-1) \\ &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 \\ &= -2 + 1 + 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\bullet \text{ (ii) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(-2) \\ &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 \\ &= -8 + 12 - 6 + 1 \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

$$\bullet \text{ (iii) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(3) \\ &= (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6 \\ &= 27 - 36 + 3 + 6 = 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\text{हल : (i) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(-1) \\ &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 \\ &= -2 + 1 + 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\bullet \text{ (ii) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(-2) \\ &= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 \\ &= -8 + 12 - 6 + 1 \\ &= -1 \neq 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

$$\bullet \text{ (iii) माना } g(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x) \text{ को } g(x) \text{ से भाग देने पर शेषफल} &= p(3) \\ &= (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6 \\ &= 27 - 36 + 3 + 6 = 0 \end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 3.

k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणखण्ड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

हल : माना $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

● (i) $p(x) = x^2 + x + k$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow (1)^2 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow 1 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow k = -2$

● (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow 2 + k + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow k = -(2 + \sqrt{2})$

● (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है।

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

हल : माना $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

● (i) $p(x) = x^2 + x + k$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow (1)^2 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow 1 + 1 + k = 0$

$\Rightarrow k = -2$

● (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow 2 + k + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow k = -(2 + \sqrt{2})$

● (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणखण्ड है।

$\therefore p(1) = 0$

$\Rightarrow k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$

$$\Rightarrow k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2} - 1$$

● (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

∵ $x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore p(1) = 0$$

$$\Rightarrow k(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$$\Rightarrow 2k = 3$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2} - 1$$

● (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

∵ $x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore p(1) = 0$$

$$\Rightarrow k(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$$\Rightarrow 2k = 3$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

प्रश्न 4.

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$$[\because 12 \times 1 = 12, (-4) \times (-3) = 12, -4 - 3 = -7]$$

$$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$$

$$= (3x - 1)(4x - 1)$$

● (ii) $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$ $[\because 2 \times 3 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 + 1 = 7]$

$$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$$

$$= (x + 3)(2x + 1)$$

● (iii) $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$ $[\because 6 \times (-6) = -36, 9 \times (-4) = -36, 9 - 4 = 5]$

$$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$$

$$= (2x + 3)(3x - 2)$$

● (iv) $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$ $[\because 3 \times (-4) = -12, -4 + 3 = -1]$

$$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$$

$$= (3x - 4)(x + 1)$$

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$[\because 12 \times 1 = 12, (-4) \times (-3) = 12, -4 - 3 = -7]$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= (3x - 1)(4x - 1)$

● (ii) $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$

$(\because 2 \times 3 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 + 1 = 7)$

$= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= (x + 3)(2x + 1)$

● (iii) $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$[\because 6 \times (-6) = -36, 9 \times (-4) = -36, 9 - 4 = 5]$

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (2x + 3)(3x - 2)$

● (iv) $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$[\because 3 \times (-4) = -12, -4 + 3 = -1]$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

प्रश्न 5.

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

\Rightarrow

$p(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$

$= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1^2)(x - 2)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$

● (ii) माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

यहाँ अचर पद = 5

5 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 5$

$x = -1$ पर

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
 $\Rightarrow p(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$
 $= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$
 $= (x^2 - 1^2)(x - 2)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

$$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

● (ii) माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

यहाँ अचर पद = 5

5 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 5$

$x = -1$ पर

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$
 $= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
 $= x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$
 $= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$
 $= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$
 $= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5)$
 $= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$
 $= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$
 $= (x + 1)^2(x - 5)$

$$[\because 1 \times (-5) = -5, -5 + 1 = -4]$$

● (iii) माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद = 20

20 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$x = -1$

शेषफल $p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$
 $= -1 + 13 - 32 + 20 = 0$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$
 $= x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20$
 $= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20$
 $= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$
 $= (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$
 $= (x + 1)(x^2 + 2x + 10x + 20)$
 $= (x + 1)[x(x + 2) + 10(x + 2)]$
 $= (x + 1)(x + 2)(x + 10)$

$$(\because 1 \times 20 = 20, 10 \times 2 = 20, 10 + 2 = 12)$$

● (iv) माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$= 2y^3 - 2y + y^2 - 1$
 $= 2y(y^2 - 1) + 1(y^2 - 1)$
 $= (y^2 - 1)(2y + 1)$
 $= (y^2 - 1^2)(2y + 1)$
 $= (y - 1)(y + 1)(2y + 1)$

$$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x+1) - 4x(x+1) - 5(x+1) \\
&= (x+1)(x^2 - 4x - 5) \\
&= (x+1)(x^2 - 5x + x - 5) \\
&= (x+1)[x(x-5) + 1(x-5)] \\
&= (x+1)(x-5)(x+1) \\
&= (x+1)^2(x-5)
\end{aligned}$$

$$[\because 1 \times (-5) = -5, -5 + 1 = -4]$$

● (iii) माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद = 20

20 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$$x = -1$$

$$\begin{aligned}
\text{शेषफल } p(-1) &= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20 \\
&= -1 + 13 - 32 + 20 = 0
\end{aligned}$$

\therefore शेषफल शून्य है।

\therefore $x+1$, $p(x)$ का एक गुणखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$$= x^2(x+1) + 12x^2 + 32x + 20$$

$$= x^2(x+1) + 12x(x+1) + 20x + 20$$

$$= x^2(x+1) + 12x(x+1) + 20(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 + 12x + 20)$$

$$= (x+1)(x^2 + 2x + 10x + 20)$$

$$(\because 1 \times 20 = 20, 10 \times 2 = 20, 10 + 2 = 12)$$

$$= (x+1)[x(x+2) + 10(x+2)]$$

$$= (x+1)(x+2)(x+10)$$

● (iv) माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$$= 2y^3 - 2y + y^2 - 1$$

$$= 2y(y^2 - 1) + 1(y^2 - 1)$$

$$= (y^2 - 1)(2y + 1)$$

$$= (y^2 - 1^2)(2y + 1)$$

$$= (y-1)(y+1)(2y+1)$$

$$[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

प्रश्नावली 2.5

प्रश्न 1.

उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(x+4)(x+10)$

(ii) $(x+8)(x-10)$

(iii) $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $(y^2 + \frac{3}{2})$

(v) $(y^2 - \frac{3}{2})$

(vi) $(3-2x)(3+2x)$

$$\text{हल : (i) } (x + 4)(x + 10) = x^2 + x(4 + 10) + (4)(10) \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$= x^2 + 14x + 40$$

$$\bullet \text{ (ii) } (x + 8)(x - 10) = x^2 + x(8 - 10) + (8)(-10) \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$= x^2 - 2x - 80$$

$$\bullet \text{ (iii) } (3x + 4)(3x - 5) = (3x)^2 + 3x(4 - 5) + (4)(-5)$$

$$= 9x^2 - 3x - 20 \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$\bullet \text{ (iv) } \left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right) = (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= y^4 - \frac{9}{4} \quad [\because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2]$$

$$\bullet \text{ (v) } (3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$$

$$= 9 - 4x^2 \quad [\because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2]$$

प्रश्न 2.

सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103×107

(ii) 95×96

(iii) 104×96

$$\text{हल : (i) } 103 \times 107 = (100 + 3) \times (100 + 7)$$

$$= (100)^2 + 100 \times (3 + 7) + 3 \times 7$$

$$= 10000 + 1000 + 21$$

$$= 11021 \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$\bullet \text{ (ii) } 95 \times 96 = (100 - 5)(100 - 4)$$

$$= (100)^2 + 100 \times (-5 - 4) + (-5)(-4)$$

$$= 10000 - 900 + 20$$

$$= 9120 \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$\bullet \text{ (iii) } 104 \times 96 = (100 + 4) \times (100 - 4)$$

$$= (100)^2 - (4)^2$$

$$= 10000 - 16 = 9984 \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

$$\text{हल : (i) } 103 \times 107 = (100 + 3) \times (100 + 7)$$

$$= (100)^2 + 100 \times (3 + 7) + 3 \times 7$$

$$= 10000 + 1000 + 21$$

$$= 11021 \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$\bullet \text{ (ii) } 95 \times 96 = (100 - 5)(100 - 4)$$

$$= (100)^2 + 100 \times (-5 - 4) + (-5)(-4)$$

$$= 10000 - 900 + 20$$

$$= 9120 \quad [\because (x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab]$$

$$\bullet \text{ (iii) } 104 \times 96 = (100 + 4) \times (100 - 4)$$

$$= (100)^2 - (4)^2$$

$$= 10000 - 16 = 9984 \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

प्रश्न 3.

उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखण्डन कीजिए :

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

$$\frac{y^2}{100}$$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$
 $= (3x + y)^2$

$$[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$$

● (ii) $4y^2 - 4y + 1 = (2y)^2 - 2(2y)(1) + 1^2$
 $= (2y - 1)^2$

$$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$

● (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$
 $= \left(x - \frac{y}{10}\right)\left(x + \frac{y}{10}\right)$

$$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$
 $= (3x + y)^2$

$$[\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$$

● (ii) $4y^2 - 4y + 1 = (2y)^2 - 2(2y)(1) + 1^2$
 $= (2y - 1)^2$

$$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$

● (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$
 $= \left(x - \frac{y}{10}\right)\left(x + \frac{y}{10}\right)$

$$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

प्रश्न 4.

उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

(ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

(vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे—

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

● (i) $(x + 2y + 4z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2x(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)x$
 $= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$

● (ii) $(2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2z(2x)$
 $= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$

$$(i) (x + 2y + 4z)^2$$

$$(ii) (2x - y + z)^2$$

$$(iii) (-2x + 3y + 2z)^2$$

$$(iv) (3a - 7b - c)^2$$

$$(v) (-2x + 5y - 3z)^2$$

$$(vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1 \right]^2$$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे—

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\bullet (i) (x + 2y + 4z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2x(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)x \\ = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$$

$$\bullet (ii) (2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)z + 2z(2x) \\ = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$$

$$\bullet (iii) (-2x + 3y + 2z)^2 = (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) \\ + 2(2z)(-2x) \\ = 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$$

$$\bullet (iv) (3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) \\ + 2(-c)(3a) \\ = 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca$$

$$\bullet (v) (-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) \\ + 2(-3z)(-2x) \\ = 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$$

$$\bullet (vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1 \right]^2 = \left(\frac{1}{4}a \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b \right)^2 + 1^2 + 2\left(\frac{1}{4}a \right)\left(-\frac{1}{2}b \right) + 2\left(-\frac{1}{2}b \right)(1) \\ + 2(1)\left(\frac{1}{4}a \right) \\ = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 1 - \frac{1}{4}ab - b + \frac{1}{2}a$$

$$\bullet (iii) (-2x + 3y + 2z)^2 = (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) \\ + 2(2z)(-2x) \\ = 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$$

$$\bullet (iv) (3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) \\ + 2(-c)(3a) \\ = 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca$$

$$\bullet (v) (-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) \\ + 2(-3z)(-2x) \\ = 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$$

$$\bullet (vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1 \right]^2 = \left(\frac{1}{4}a \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b \right)^2 + 1^2 + 2\left(\frac{1}{4}a \right)\left(-\frac{1}{2}b \right) + 2\left(-\frac{1}{2}b \right)(1) \\ + 2(1)\left(\frac{1}{4}a \right) \\ = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 1 - \frac{1}{4}ab - b + \frac{1}{2}a$$

प्रश्न 5.

गुणनखण्डन कीजिए :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

● (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$$

$$= (2x + 3y - 4z)^2$$

● (ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y)$$

$$+ 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$$

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

● (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$$

$$= (2x + 3y - 4z)^2$$

● (ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y)$$

$$+ 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$$

प्रश्न 6.

निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए :

(i) $(2x + 1)^3$

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$

(iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

हल : (i) $(2x + 1)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

∴ $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$

$$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

● (ii) $(2a - 3b)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

∴ $(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b)$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b)$$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$$

$$(i) (2x + 1)^3$$

$$(ii) (2a - 3b)^3$$

$$(iii) \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$$

$$(iv) \left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$$

हल : (i) $(2x + 1)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\begin{aligned}\therefore (2x + 1)^3 &= (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1) \\ &= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1) \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

● (ii) $(2a - 3b)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$\begin{aligned}(x - y)^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (2a - 3b)^3 &= (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b) \\ &= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b) \\ &= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2\end{aligned}$$

● (iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3 &= \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)\left(\frac{3}{2}x + 1\right) \\ &= \frac{27x^3}{8} + 1 + \frac{9x}{2}\left(\frac{3x}{2} + 1\right) = \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1\end{aligned}$$

● (iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(x - \frac{2}{3}y\right)^3 &= (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)\left(x - \frac{2}{3}y\right) \\ &= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x - \frac{2}{3}y\right) \\ &= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2\end{aligned}$$

- (iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$= \frac{27x^3}{8} + 1 + \frac{9x}{2}\left(\frac{3x}{2} + 1\right) = \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

- (iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{3}y\right)^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)\left(x - \frac{2}{3}y\right)$$

$$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x - \frac{2}{3}y\right)$$

$$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2$$

प्रश्न 7.

उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(99)^3$

(ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

हल : (i) $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$$= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1)$$

$$= 1000000 - 1 - 300 \times 99$$

$$[\text{सर्वसमिका } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ से}]$$

$$= 1000000 - 1 - 29700$$

$$= \mathbf{970299}$$

● (ii) $(102)^3 = (100 + 2)^3$

$$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100 + 2)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ से}]$$

$$= 1000000 + 8 + 600 \times 102$$

$$= 1000000 + 8 + 61200$$

$$= \mathbf{1061208}$$

● (iii) $(998)^3 = (1000 - 2)^3$

$$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ से}]$$

$$= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998$$

$$= 1000000000 - 8 - 5988000$$

$$= \mathbf{994011992}$$

$$\begin{aligned}
\text{हल : (i) } (99)^3 &= (100 - 1)^3 \\
&= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1) \\
&= 1000000 - 1 - 300 \times 99 \\
&\quad [\text{सर्वसमिका } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ से}] \\
&= 1000000 - 1 - 29700 \\
&= \mathbf{970299}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ (ii) } (102)^3 &= (100 + 2)^3 \\
&= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100 + 2) \\
&\quad [\text{सर्वसमिका } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ से}] \\
&= 1000000 + 8 + 600 \times 102 \\
&= 1000000 + 8 + 61200 \\
&= \mathbf{1061208}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ (iii) } (998)^3 &= (1000 - 2)^3 \\
&= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2) \\
&\quad [\text{सर्वसमिका } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ से}] \\
&= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998 \\
&= 1000000000 - 8 - 5988000 \\
&= \mathbf{994011992}
\end{aligned}$$

प्रश्न 8.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्डन कीजिए।

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$(v) 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

$$(ii) 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iv) 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$(v) 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

$$(ii) 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iv) 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$\text{हल : (i) } 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)(b)(2a + b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{ से}]$$

$$= (2a + b)^3$$

$$\bullet \text{ (ii) } 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)(b)(2a - b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (2a - b)^3$$

$$\bullet \text{ (iii) } 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 = (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)(5a)(3 - 5a)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (3 - 5a)^3$$

$$\bullet \text{ (iv) } 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2 = (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)(3b)(4a - 3b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (4a - 3b)^3$$

$$\bullet \text{ (v) } 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p = (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$$

$$\text{हल : (i) } 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)(b)(2a + b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{ से}]$$

$$= (2a + b)^3$$

$$\bullet \text{ (ii) } 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2 = (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2b + 3(2a)b^2$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)(b)(2a - b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (2a - b)^3$$

$$\bullet \text{ (iii) } 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2 = (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)(5a)(3 - 5a)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (3 - 5a)^3$$

$$\bullet \text{ (iv) } 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2 = (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)(3b)(4a - 3b)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= (4a - 3b)^3$$

$$\bullet \text{ (v) } 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p = (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$$

$$[\text{सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से}]$$

$$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$$

प्रश्न 9.

सत्यापित कीजिए :

$$\text{(i) } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{(ii) } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\text{हल : (i) सर्वसमिका } (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{ से,}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

$$= (x + y)(x^2 + y^2 + 2xy - 3xy)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

यही सिद्ध करना था।

$$\bullet \text{ (ii) सर्वसमिका } (x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) \text{ से,}$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$= (x - y)[(x - y)^2 + 3xy]$$

$$= (x - y)(x^2 + y^2 - 2xy + 3xy)$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

यही सिद्ध करना था।

$$(i) x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (ii) x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

हल : (i) सर्वसमिका $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ से,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] \\ &= (x + y)(x^2 + y^2 + 2xy - 3xy) \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

● (ii) सर्वसमिका $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ से,

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \\ &= (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] \\ &= (x - y)(x^2 + y^2 - 2xy + 3xy) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 10.

निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्डन कीजिए

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$

$$\begin{aligned} &= (3y + 5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2] \\ &\quad \text{[सर्वसमिका } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \text{ से]} \\ &= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2) \end{aligned}$$

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$

$$\begin{aligned} &= (3y + 5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2] \\ &\quad \text{[सर्वसमिका } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \text{ से]} \\ &= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2) \end{aligned}$$

● (ii) $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$

$$\begin{aligned} &= (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2] \\ &\quad \text{[सर्वसमिका } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \text{ से]} \\ &= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2) \end{aligned}$$

● (ii) $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$

$$\begin{aligned} &= (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2] \\ &\quad \text{[सर्वसमिका } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \text{ से]} \\ &= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2) \end{aligned}$$

प्रश्न 11.

गुणनखण्ड कीजिए : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

हल : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)z$

$$= (3x + y + z)[(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y - yz - z(3x)]$$

[सर्वसमिका $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ से]

$$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$$

$$\begin{aligned}
\text{हल : } 27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz &= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)z \\
&= (3x + y + z) [(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y - yz - z(3x)] \\
& \quad [\text{सर्वसमिका } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ से}] \\
&= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)
\end{aligned}$$

प्रश्न 12.

सत्यापित कीजिए :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) \\
& \quad + (z^2 + x^2 - 2zx)] \\
& \quad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2] \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]
\end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) \\
& \quad + (z^2 + x^2 - 2zx)] \\
& \quad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2] \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]
\end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 13.

यदि $x + y + z = 0$ हो तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
x + y + z = 0 \text{ रखने पर,} \\
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \\
x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz
\end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
x + y + z = 0 \text{ रखने पर,} \\
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \\
x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz
\end{aligned}$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 14.

घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

हल : (i) माना $-12 = x$, $7 = y$, $5 = z$

$\therefore x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$
 $= -1260$

● (ii) माना $28 = x$, $-15 = y$, $-13 = z$

$\therefore x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13)$
 $= 16380$

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

हल : (i) माना $-12 = x$, $7 = y$, $5 = z$

$\therefore x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$
 $= -1260$

● (ii) माना $28 = x$, $-15 = y$, $-13 = z$

$\therefore x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3(28)(-15)(-13)$
 $= 16380$

प्रश्न 15.

नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लम्बाई और चौड़ाई के लिए सम्भव व्यंजक दीजिए।

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : (i) आयत का क्षेत्रफल = $25a^2 - 35a + 12$

\Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई = $25a^2 - 35a + 12$
 $= 25a^2 - 20a - 15a + 12$

[$\because 25 \times 12 = 300$; $300 = (-20)(-15)$; $-20 - 15 = -35$]

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई = $5a - 4$ तो चौड़ाई = $5a - 3$

यदि लम्बाई = $5a - 3$ तो चौड़ाई = $5a - 4$

● (ii) आयत का क्षेत्रफल = $35y^2 + 13y - 12$

$= 35y^2 + 28y - 15y - 12$

[$\because 35 \times (-12) = -420$; $-420 = 28 \times (-15)$; $28 - 15 = 13$]

$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4) = (5y + 4)(7y - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई = $5y + 4$ तो चौड़ाई = $7y - 3$

यदि लम्बाई = $7y - 3$ तो चौड़ाई = $5y + 4$

हल : (i) आयत का क्षेत्रफल = $25a^2 - 35a + 12$
 \Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई = $25a^2 - 35a + 12$
 $= 25a^2 - 20a - 15a + 12$
 $[\because 25 \times 12 = 300; 300 = (-20)(-15); -20 - 15 = -35]$
 $= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$
 $= (5a - 4)(5a - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई = $5a - 4$ तो चौड़ाई = $5a - 3$

यदि लम्बाई = $5a - 3$ तो चौड़ाई = $5a - 4$

● (ii) आयत का क्षेत्रफल = $35^2 + 13y - 12$
 $= 35y^2 + 28y - 15y - 12$
 $[\because 35 \times (-12) = -420; -420 = 28 \times (-15); 28 - 15 = 13]$
 $= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4) = (5y + 4)(7y - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव है :

यदि लम्बाई = $5y + 4$ तो चौड़ाई = $7y - 3$

यदि लम्बाई = $7y - 3$ तो चौड़ाई = $5y + 4$

प्रश्न 16.

घनाभों (Cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं, की विमाओं के लिए सम्भव व्यंजक क्या हैं :

(i) आयतन : $3x^2 - 12x$

(ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : (i) घनाभ का आयतन = $3x^2 - 12x$
 \Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई \times ऊँचाई = $3x^2 - 12x$
 $= 3x(x - 4)$

\therefore घनाभ की विमाएँ = $3, x$ और $(x - 4)$

● (ii) घनाभ का आयतन = $12ky^2 + 8ky - 20k$

\Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई \times ऊँचाई = $12ky^2 + 8ky - 20k$
 $= 4k(3y^2 + 2y - 5)$
 $= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$[\because 3 \times (-5) = -15; -15 = 5 \times (-3); 5 - 3 = 2]$

$= 4k [y(3y + 5) - 1(3y + 5)] = 4k(3y + 5)(y - 1)$

\therefore घनाभ की विमाएँ = $4k, (3y + 5)$ और $(y - 1)$

हल : (i) घनाभ का आयतन = $3x^2 - 12x$

\Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई \times ऊँचाई = $3x^2 - 12x$
 $= 3x(x - 4)$

\therefore घनाभ की विमाएँ = $3, x$ और $(x - 4)$

● (ii) घनाभ का आयतन = $12ky^2 + 8ky - 20k$

\Rightarrow लम्बाई \times चौड़ाई \times ऊँचाई = $12ky^2 + 8ky - 20k$
 $= 4k(3y^2 + 2y - 5)$
 $= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$

$[\because 3 \times (-5) = -15; -15 = 5 \times (-3); 5 - 3 = 2]$

$= 4k [y(3y + 5) - 1(3y + 5)] = 4k(3y + 5)(y - 1)$

\therefore घनाभ की विमाएँ = $4k, (3y + 5)$ और $(y - 1)$